174. Zur Klassifizierung der stetigen Abbildungen

小松醇郎（阪大）

stetige Abbildung ノ Klassifizierung ニ Homologiegruppe ハ重要ナ武器デアッテ H. Hopf ノ結果（H. Hopf: Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. Crelle Bd. 163）ガアルガ Homologiegruppe ダケデハ問題ニ深ク這入レル筈ガナイカラ現在次ニ利用サルベキハ Wegegruppe デアラウ。所ガ一般ノ Komplex ニ就テ話ヲ進メテ居テハ性質ハ殆ンド出テ来ナイ。與ヲ先ヅ二次ノ集合体ニ限ルナラバ矢張リ、H. Hopf ノ結果（Beiträge zur Klassizierung der Flächenabbildungen. Crelle Bd. 165）ガアルガ、此ノ方法ハ Komplex ノ場合及ビ次元ヲ高クスルトキニハ應用サレナイ。而モ freie Gruppe ト幾何學的性質トノ面白イ関係ハ三次元ニ於テ見ラレルノデアルカラ、此ノ問題ヲ調ベルノハ重要ナ意義ガアルコトト思フ。

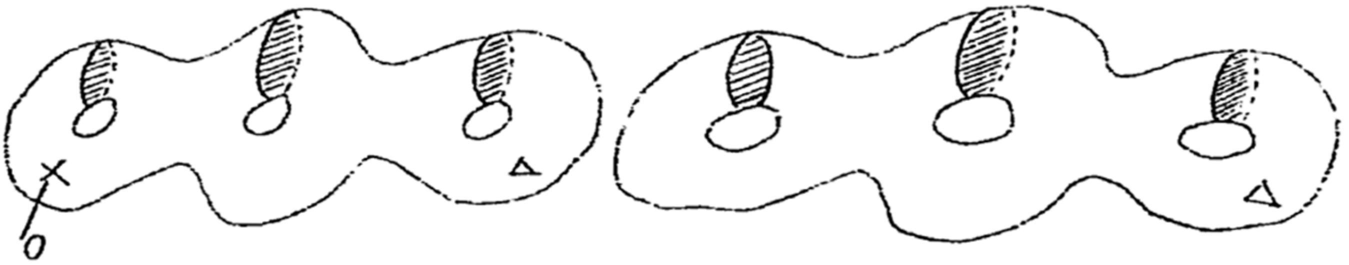
此処デハ此ノ方面ニ就テ得タ多少ノ結果ノ大体ヲ述ベテ見マスガ方針ニ於テモ、材料ニ関シテモ御教示アラバ幸ト思ヒマス。

Komplex K^n ヲ Komplex L^m ニ stetig ニ abbilden スル一ツノ Abbildungsklasse ニ對シテ K^n ノ Wegegruppe $\mathfrak{K}$ ヲ L^m ノ Wegegruppe $\mathfrak{L}$ ニ homomorph (in) ニ abbilden スル唯一ツノ Homomorphismenklasse ガ對應スル。

逆ニ $\mathfrak{K}$ ノ $\mathfrak{L}$ ヘノ任意ノ Homomorphismenklasse ヲ與ヘルヤウナ stetige Abbildung ガ存在スルカ、又存在シタトキニ唯一ツノ Abbildungsklasse ガ對應スルカ、是ガ根本問題デアル。

定理1. 種數 p ノ三次元閉集合体ノ "Nahtfläche" ハ Normalform トシテ種數 p, Rand 1 個ノ閉曲面ニ $2p$ 個ノ Elementarfläche ヲ各 henkel ニツケタモノヲ取リ得ル。

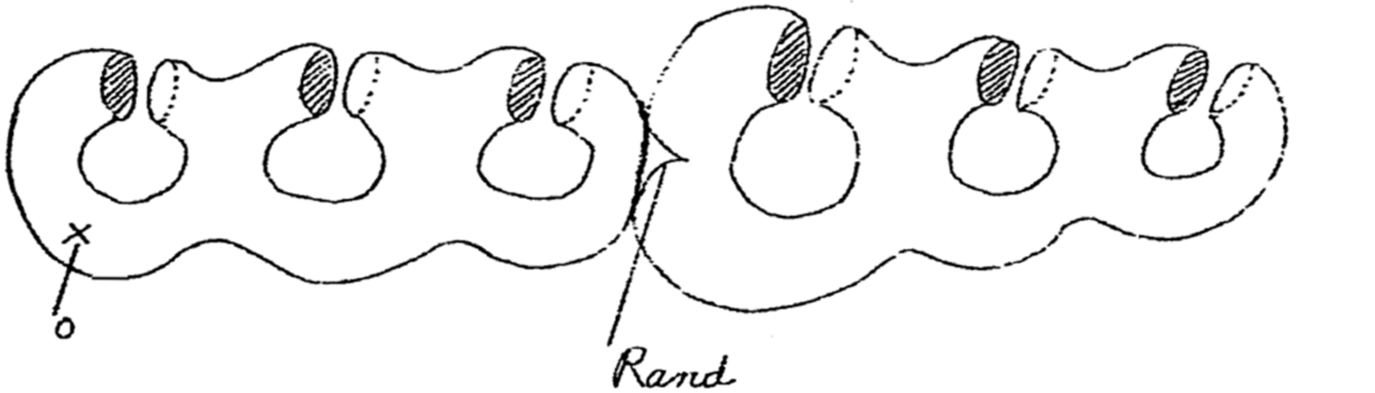
証. Heegaard-Diagramm ノ Kanonische Fläche ヲトル。此ノ曲面ヲ Nahtfläche ノ部分ニトルノデアル、ソレニハ次ノ圖デ明カニナルデアラウ。



但シ左曲面ノ標準切断線 $r_i,\ u_i\ (i=1,2,\cdots\cdots,p)$, 右曲面ノソレヲ $S_i,\ t_i\ (i=1,2,\cdots\cdots,p)$ トシ topologische abbildung ヲ

$$(1)\quad \begin{cases} r_i = \Pi_{r_i}(S,t) & (i=1,2,\cdots\cdots,p) \\ u_i = \Pi_{u_i}(S,t) \end{cases}$$

トスル。(r ト t トハ三次元集合体ノ中デ homotop 0)。



斯様ナ、球面上ノ Identifizieren デ生ズル Nahtfläche ハ常ニおいれる指標 $\chi = p^0 - p^1 + p^2 = 1$ トナルカラ生ズル三次元閉集合体ハ homogen デアル。

(Seifert: Topologie S. 208 参照)

此ノ Nahtfläche ノ Wegegruppe ハ明カニ、三次元集合体ノ Wegegruppe ト等シクテ

$$(2)\begin{cases} \text{Erzengende} & S_i \ (i=1,2,\cdots\cdots,p). \\ \text{Relationen} & 1=\prod r_i\,(S,1) \end{cases}$$

定理2. freie Gruppe mit Relationen (2) ノ任意ノ Automorphism ヲ與ヘルヤウナ Nahtfläche ノ topologische Abbildung ガ存在スル。

證明. 先ヅ定理1ノ曲面ノレッダケヲ考ヘル、Wegegruppe ハ從ッテ p 個ノ Erzengende

$$S_1, \cdots\cdots\cdots, S_p$$

ノ freie Gruppe G.

此ノ任意ノ Automorphism

$$S_i' = A(S)$$

ニ對シテレッノ topologische Abbildung ヲ與ヘ得ルコトハ freie Gruppe ノ Automorphismengruppe ノ Erzengende-Automorphism ダケヲ考ヘレバ容易ニ分ル。

Erzengende Automorphismen ハ J. Nielsen ニヨレバ

1. $A(S_i)=S_{k_i} \quad (i=1,2,\cdots,p)$ (S_i ノ permutation)
2. $A(S_1)=S_1^{-1}, \quad A(S_i)=S_i \ (i\neq 1)$
3. $A(S_1)=S_1S_2, \quad A(S_i)=S_i \ (i\neq 1)$

所ガ Nahtfläche ニテハ Relationen $\prod r_i(S,1)=1$ ガアリ、

$\pi_{r_i}(S,1)$ ノ閉曲線ヲ Rand トスル Elementarfläche p 個ガ尚附イテ居ル。

Gruppe (2) ノ Automorphism

$$s_i' = A(s) \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, p)$$

ガ與ヘラレタトスル。

群(2) $\mathfrak{U}$ ハ freie Produkte $\{s_1, s_2, \cdots\cdots, s_n\}$ ナル freie Gruppe $\mathfrak{G}$ ノ invariant Untergruppe. ソコデ

$\mathfrak{G}$ ノ Automorphism ノウチ Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ 及ビ $\mathfrak{U}$ ノ Automorphism カラ induzieren サレルモノヲ考ヘルナラバ $\mathfrak{U}$ ノ今與ヘラレタ Automorphism ハ適當ナ或ル $\mathfrak{G}$ ノ Automorphism ニテ Relationen ヲ加ヘタモノニナル。

$\mathfrak{G}$ ノ Automorphism ハ Kanonische Fläche ノ topologische Abbildung ヲ招來スルノデアツタシ hotop 0 トスル Elementarfläche ハ Automorphism カラ又全体トシテ abbilden サレル。
即チ Nahtfläche 自身ノ topologische Abbildung デソノ fundamentalgruppe ノ Automorphism ハ與ヘラレタ Automorphism ナルモノ少クトモ一ツ存在ス。

此ノ定理ハ尚精シク証明セラレナケレバナラナイガ大体ニ止

メル、少クトモ一ツノ topologische Abbildung ノ存在ヲ言フノデアルガ唯一ツトハ分ラナイ。

定理3. 三次元閉集合体ノ Fundamentalgruppe ノ任意ノ Automorphism 與ヘル様ナ topologische Abbildung in sich ガ存在スル。

即チ一ツノ Automorphismenklasse ニ對シ Abbildungsklassengruppe ノ Untergruppe ガ對應スル。

証明. Nahtfläche ノ topologische Abbildung ハ、ソノ三次元集合体ノ topologische Abbildung ヲ作ル。

何トナレバ定理1ノ所デ Nahtfläche ノ Triangulierung ニテ一ツノ Kante ニ多クトモ三ツノ Flächenstücke ガ着イテ居ル様ニ出來ル、故ニ Nahtfläche ヲ開イタ球面上デ考ヘルナラバ一ツノ Kante ニナル Kante ハ高々六ケ。

此処ノ所ハ面倒ナノデ省略シマスガ Nahtfläche ノ topologische Abbildung ハ球面ヲ球面ニシ互ヒニ identifizieren サレタ点ハ又 identifizieren サレタ点ニ移ス様ナ topologische Abbildung ト考ヘルコトガ出來ル。故ニ球面ノ内部ノ一点カラ球面ノ点ト結ブ直線ヲ球面上ノ点ノ對應ニ從ッテ對應セシメルト之デ三

次元集合体ノ topologische Abbildung トナル。

次ニ Mannigfaltigkeit M ヲ他ノ Mannigfaltigkeit M ニ stetige Abbildung ヲナシ fundamentalgruppe ノ Homomorphe Abbildung ヲナス場合ノ関係、Abbildungsgrad トノ関係等モ上記定理ヲ基礎ニ進メルコトが出来ル。